Aplicación de métodos numéricos en el análisis financiero.

Determinación de la TIR por el método de Newton Raphson

Benavides Muñoz Holger
Área de Ingeniería Hidráulica y Saneamiento.
Unidad de Ingeniería Civil, Geología y Minas.
Universidad Técnica Particular de Loja. Ecuador.

Loja, Diciembre 2007.

1 Introducción

El análisis económico, social o financiero de proyectos que requieren una inversión de capitales, se fundamentan en una evaluación de su mismo nombre que se basa en el cálculo de indicadores.

La cifra numérica que caracteriza a cada indicador se lo ha determinado desde siempre mediante modelos matemáticos simples o compuestos que simulan entre otros una actualización o proyección en el tiempo de los beneficios y egresos resumidos y presentados en un flujo neto, que concatenados con una tasa que normalmente involucra criterios como de mejor oportunidad - riesgo de inversión e inflación principalmente - se ponen de manifiesto cifras numéricas que aseguran o no la conveniencia de la inversión respecto del punto de vista considerado en la evaluación, económica, social o financiera.

Entre los indicadores financieros, se destaca la tasa interna de retorno - TIR- cuyo concepto encauza el cálculo para establecer el valor de la tasa con el que el valor actual neto - VAN – se hace cero.

Normalmente, el cálculo de la TIR se lo ha efectuado por el método de la interpolación.

2 Objetivos específicos

- Optimizar mediante métodos numéricos el procedimiento de cálculo de la tasa interna de retorno - TIR - a partir del modelo matemático del VAN para su aplicación en evaluación de proyectos.
- Comparar la precisión y error que existe para cada uno de los métodos numéricos propuestos para el cálculo de la TIR.
- Proponer el uso de métodos informáticos para el cálculo de la TIR

3 Hipótesis

Al aplicar métodos numéricos en el cálculo de la TIR a partir del modelo matemático del VAN el resultado conseguido será más preciso y confiable.

4 Metodologías:

Para el cálculo comparativo en el presente trabajo plantearemos un flujo de fondos en el tiempo, cuyos egresos e ingresos sean datos del ejemplo; así también, la tasa de oportunidad.

Cuadro 01. Datos del flujo de fondos - ejemplo -

	AÑOS							
RUBROS	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
COSTOS TOTALES	18.000	1.000	1.000	4.000	2.000	2.000	2.000	0.000
BENEFICIOS TOTALES	0.000	4.000	4.000	6.000	6.000	6.000	6.000	7.000
FLUJO DE FONDOS	-18.000	3.000	3.000	2.000	4.000	4.000	4.000	7.000

Fuente: El autor

4.1 Método de interpolación lineal

Este procedimiento requiere que el calculista imponga dos tasas - una menor y una mayor - tal que ellas originen un VAN positivo y otro negativo, respectivamente. La TIR es el valor de la tasa (del eje de las abscisas) que interseca con la recta cuya trayectoria pasa por las coordenadas del punto dado por la tasa menor y su VAN $\left(I_{menor}, VAN_{I\ menor}\right)$ y por el punto cuyas coordenadas resultan de la tasa mayor y su respectivo VAN $\left(I_{MAYOR}, VAN_{I\ MAYOR}\right)$.

Como un procedimiento se resume que:

a) Obtenemos el modelo matemático del VAN,

$$\boxed{VAN = -E_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{VA_j}{(1+i)^j}} \qquad [01]$$

donde,

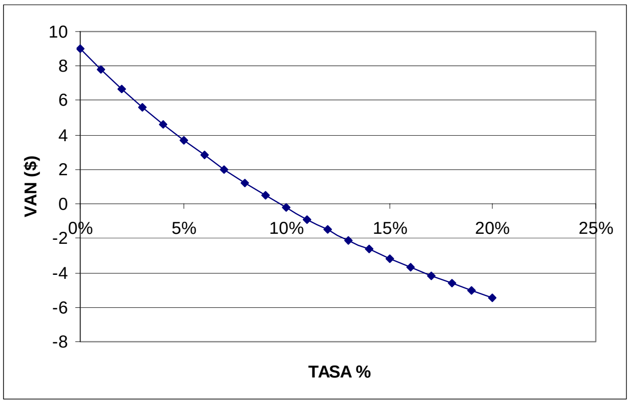
E_0	-	inversión en el año cero.
VA_j	-	ingresos menos egresos para el período j.
n	-	número de períodos totales.
i	-	tasa.

En este ejemplo la ecuación del VAN es:

$$VAN_i = -18000 + \frac{3000}{(1+i)^1} + \frac{3000}{(1+i)^2} + \frac{2000}{(1+i)^3} + \frac{4000}{(1+i)^4} + \frac{4000}{(1+i)^5} + \frac{4000}{(1+i)^6} + \frac{7000}{(1+i)^7}$$

b) Graficamos la curva en un sistema coordenado, tasa en el eje de las abscisas y VAN en el de las ordenadas.

Gráfico 01. Tasa versus VAN



Fuente: El autor

c) A continuación asignamos dos valores de tasa, con las que podamos obtener un VAN positivo y otro negativo; en este caso propuesto, la intersección de la curva con el eje de las abscisas están alrededor del 10% (gráfico 01), entonces asumimos un valor de 9% para la tasa menor y 11% para la tasa mayor.

Así tenemos,

$$VAN_{9\%} = -18000 + \frac{3000}{(1+0.09)^1} + \frac{3000}{(1+0.09)^2} + \frac{2000}{(1+0.09)^3} + \frac{4000}{(1+0.09)^4} + \frac{4000}{(1+0.09)^5} + \frac{4000}{(1+0.09)^6} + \frac{7000}{(1+0.09)^7}$$

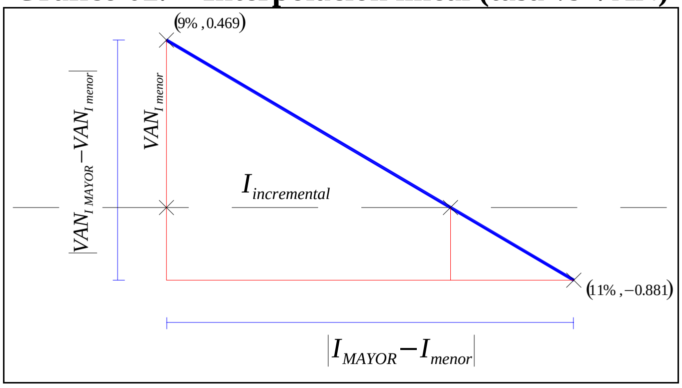
$$VAN_{9\%} = 0.469$$

$$VAN_{11\%} = -18000 + \frac{3000}{(1+0.11)^1} + \frac{3000}{(1+0.11)^2} + \frac{2000}{(1+0.11)^3} + \frac{4000}{(1+0.11)^4} + \frac{4000}{(1+0.11)^5} + \frac{4000}{(1+0.11)^6} + \frac{7000}{(1+0.11)^7}$$

$$VAN_{11\%} = -0.881$$

La recta pasará por las coordenadas: $(9\% , 0.469)$ y $(11\% , -0.881)$; (gráfico 02).

Gráfico 02. Interpolación lineal (tasa vs VAN)



Fuente: El autor

d) Planteando proporcionalidad y basados en el criterio de semejanza de triángulos tenemos que:

$$\left(\frac{I_{MAYOR} - I_{menor}}{I_{incremental}}\right) = \left(\frac{|VAN_{I\ MAYOR} - VAN_{I\ menor}|}{VAN_{I\ menor}}\right)$$

$$I_{incremental} = \left(\frac{I_{MAYOR} - I_{menor}}{|VAN_{I\ MAYOR} - VAN_{I\ menor}|}\right) VAN_{I\ menor}$$

$$TIR = I_{menor} + I_{incremental}$$

Una forma de presentar la fórmula para calcular la tasa con la que el VAN se hace cero es la fórmula 02:

$$\boxed{TIR = I_{menor} + \left(\frac{I_{MAYOR} - I_{menor}}{|VAN_{I_{MAYOR}} - VAN_{I_{menor}}|}\right) VAN_{I_{menor}}} \qquad [02]$$

donde,

I_{menor}	-	valor impuesto como tasa menor.
I_{MAYOR}	-	valor impuesto como tasa mayor.
$VAN_{I_{menor}}$	-	VAN calculado con la tasa menor.
$VAN_{I_{MAYOR}}$	-	VAN calculado con la tasa mayor.
TIR	-	tasa interna de retorno.

Tabla 01. Resumen del cálculo de la TIR por interpolación lineal

		AÑOS								VAN
	RUBROS	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	
	COSTOS TOTALES	18.000	1.000	1.000	4.000	2.000	2.000	2.000	0.000	
	BENEFICIOS TOTALES	0.000	4.000	4.000	6.000	6.000	6.000	6.000	7.000	
	FLUJO DE FONDOS	-18.000	3.000	3.000	2.000	4.000	4.000	4.000	7.000	
9.0%	Factor de actualización	1.0000	0.9174	0.8417	0.7722	0.7084	0.6499	0.5963	0.5470	
	Flujo Neto Actual (0.09)	-18.000	2.752	2.525	1.544	2.834	2.600	2.385	3.829	0.469
11.0%	Factor de actualización	1.0000	0.9009	0.8116	0.7312	0.6587	0.5935	0.5346	0.4817	
	Flujo Neto Actual (0.11)	-18.000	2.703	2.435	1.462	2.635	2.374	2.139	3.372	-0.881

Fuente: El autor

$$TIR = 0.09 + \left(\frac{0.11 - 0.09}{\left| -0.881 - 0.469 \right|} \right) 0.469$$

$$TIR = 9.70\,\%$$

Como se puede observar, el resultado de la TIR obtenido por este método será más preciso en tanto y en cuanto los dos valores del VAN - resultados de las tasas menor y mayor impuestas - se aproximen más a cero.

4.2 Método de tanteos

Partiendo de la ecuación del VAN expresada en función de la tasa (i), mediante tanteos se puede crear una tabla de datos tales que nos permitan conocer el valor de la tasa con la que el VAN se hace cero, es decir aproximar la TIR.

Como procedimiento podemos sugerir que:

a) Obtener la ecuación del VAN, para el ejemplo propuesto:

$$VAN_i = -18000 + \frac{3000}{(1+i)^1} + \frac{3000}{(1+i)^2} + \frac{2000}{(1+i)^3} + \frac{4000}{(1+i)^4} + \frac{4000}{(1+i)^5} + \frac{4000}{(1+i)^6} + \frac{7000}{(1+i)^7}$$

b) Crear una tabla, cuyas dos columnas sean la de la tasa (i) que iremos variando y la del VAN respectivo. Iniciamos asignando valores de la tasa cuyos VAN se aproximen a cero.

Tabla 02. Cálculo de la TIR por tanteos

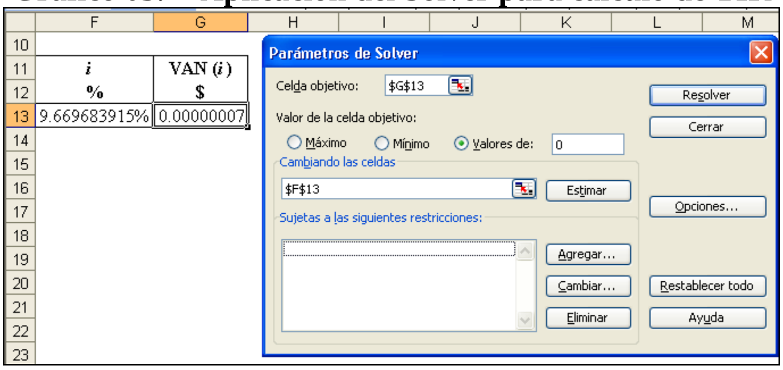
i %	VAN (*i*) $
20.0%	-5429.5732
10.0%	-225.0172
5.0%	3690.4520
7.0%	1984.7929
9.0%	469.4359
9.5%	117.2487
9.8%	-89.2791
9.7%	13.5431
9.7500%	-55.1026
9.6697%	-0.0111

Fuente: El autor

c) Afinar el valor de la tasa, manualmente, hasta que el VAN tenga un valor muy aproximado a cero. Anotaremos esta última tasa como la TIR. En el presente ejemplo, la TIR será 9.6697%.

d) Para agilitar este proceso de tanteos, podemos hacer uso del "solver", herramienta del Microsoft Excel.

Gráfico 03. Aplicación del Solver para cálculo de TIR



Fuente: El autor

Como podemos apreciar en este ejemplo didáctico, el solver de Excel nos proporciona un valor de la tasa (TIR) con la que el VAN se aproxima mucho a cero de: 9.66968…% La precisión es de: 10^{-7}.

4.3 Método de Newton - Raphson

Aplicar el método numérico de Newton – Raphson para el cálculo de la TIR basados en la ecuación del VAN, proporciona resultados más confiables en un menor intervalo de tiempo de cálculo, comparado con el método convencional de interpolación.

Como procedimiento podemos sugerir:

a) Obtener la ecuación del VAN,

$$VAN_i = -18000 + \frac{3000}{(1+i)^1} + \frac{3000}{(1+i)^2} + \frac{2000}{(1+i)^3} + \frac{4000}{(1+i)^4} + \frac{4000}{(1+i)^5} + \frac{4000}{(1+i)^6} + \frac{7000}{(1+i)^7}$$

b) El cálculo del valor de la tasa con la que el VAN sea cero se lo efectúa con la fórmula 03, método Newton – Raphson - :

$$\boxed{I_{j+1} = I_j - \frac{VAN_{(I_j)}}{van'_{(I_j)}}} \qquad [03]$$

donde,

I_j	-	valor impuesto de la tasa.
$VAN_{(I_j)}$	-	VAN calculado con la tasa impuesta (I_j).
$van'_{(I_j)}$	-	primera derivada de la ecuación del VAN con respecto de la tasa.

Entonces,

$$VAN_{(I_j)} = -18000 + \frac{3000}{(1+I)^1} + \frac{3000}{(1+I)^2} + \frac{2000}{(1+I)^3} + \frac{4000}{(1+I)^4} + \frac{4000}{(1+I)^5} + \frac{4000}{(1+I)^6} + \frac{7000}{(1+I)^7}$$

$$van'_{(I_j)} = -\frac{3000}{(1+I)^2} - \frac{6000}{(1+I)^3} - \frac{6000}{(1+I)^4} - \frac{16000}{(1+I)^5} - \frac{20000}{(1+I)^6} - \frac{24000}{(1+I)^7} - \frac{49000}{(1+I)^8}$$

$$I_{j+1} = I_j - \frac{\left(-18000 + \frac{3000}{(1+I_j)^1} + \frac{3000}{(1+I_j)^2} + \frac{2000}{(1+I_j)^3} + \frac{4000}{(1+I_j)^4} + \frac{4000}{(1+I_j)^5} + \frac{4000}{(1+I_j)^6} + \frac{7000}{(1+I_j)^7}\right)}{\left(-\frac{3000}{(1+I_j)^2} - \frac{6000}{(1+I_j)^3} - \frac{6000}{(1+I_j)^4} - \frac{16000}{(1+I_j)^5} - \frac{20000}{(1+I_j)^6} - \frac{24000}{(1+I_j)^7} - \frac{49000}{(1+I_j)^8}\right)}$$

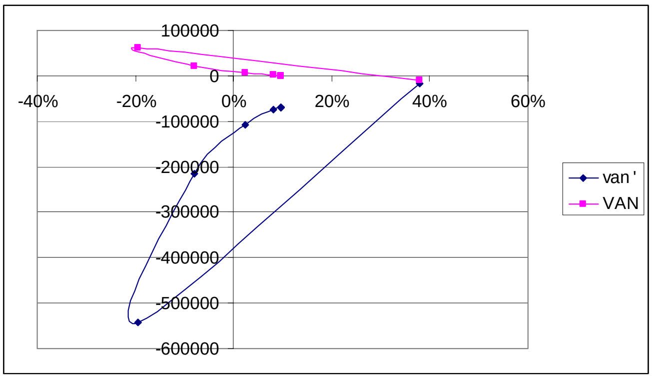
Tabla 03. Cálculo de la TIR por el método de Newton - Raphson

	I (*j*)	VAN	van '	I (*j+1*)	Δ
	38.0%	-10274.0752582954	-17848.629	-19.5622644578741%	
	-19.562264457874%	62537.2577175285	-541586.924	-8.0152246453918%	11.5470398124823%
	-8.015224645392%	22204.1532338852	-215623.359	2.28243205574847%	10.2976567011402%
	2.28243205574847%	6368.1937757391	-107115.854	8.22757793304497%	5.94514587729650%
	8.22757793304497%	1033.8492926605	-74718.0000	9.61124624900103%	1.38366831595606%
	9.61124624900103%	40.251302775604900	-68993.9156	9.66958661485832%	0.05834036585729%
	9.66958661485832%	0.066907742136209	-68764.7026	9.66968391440240%	0.00009729954408%
	9.66968391440240%	0.000000185591034	-68764.3211	9.66968391467229%	0.00000000026989%
	9.66968391467229%	-0.000000000003638	-68764.3211	9.66968391467228%	0.00000000000000%
	9.66968391467228%	-0.000000000003638	-68764.3211	9.66968391467228%	0.00000000000000%
TIR	9.66968391467228%	-0.000000000003638	-68764.3211	9.66968391467227%	0.00000000000000%

Fuente: El autor

En este ejemplo hemos iniciado las corridas de análisis con un valor muy diferente al del resultado (38 %), tal que se vea la bondad del procedimiento planteado; mas, el método converge al punto de respuesta en un número menor de líneas de corrida, en tanto en cuanto la cifra inicial impuesta sea aproximada al resultado esperado. En este caso - tabla 03 - a parir de la sexta corrida podemos tener ya un valor muy aproximado al resultado final.

Gráfico 04. Tasa vs. VAN y vs. su primera derivada (van’)



Fuente: El autor

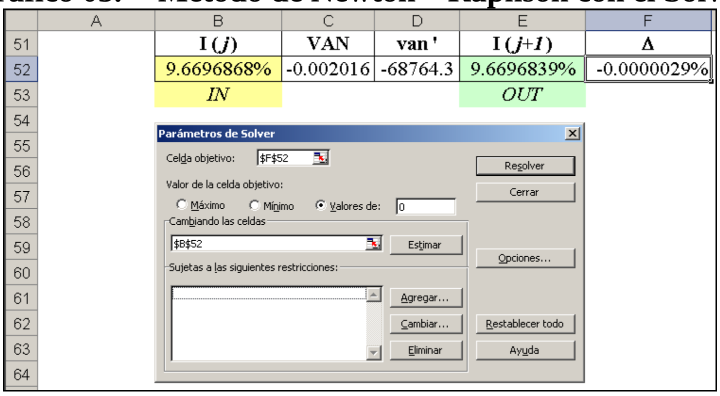
Tabla 04. Cálculo de la TIR por el método de Newton - Raphson

	I (*j*)	VAN	van '	I (*j+1*)	Δ
	15.0%	-3171.2512943986	-51286.103	8.8165485729522%	
	8.816548572952%	601.2127004681	-72212.380	9.6491103886064%	8.33E-03
	9.649110388606%	14.1555472909	-68845.044	9.66967185021715%	2.06E-04
	9.66967185021715%	0.0082960435	-68764.368	9.66968391466813%	1.21E-07
	9.66968391466813%	0.000000002847628	-68764.3211	9.66968391467227%	4.14E-14
	9.66968391467227%	0.000000000010004	-68764.3211	9.66968391467229%	1.39E-16
TIR	9.66968391467229%	-0.000000000003638	-68764.3211	9.66968391467228%	0.00E+00

En este segundo ejemplo - tabla 4 -, las corridas las iniciamos asignando un valor de la tasa un tanto más aproximado al resultado final (15%); observamos que la respuesta converge muy favorablemente a partir de la cuarta línea de corrida.

Para calcular la TIR por el método de Newton-Raphson también podemos utilizar la herramienta solver.

Gráfico 05. Método de Newton – Raphson con el Solver



Fuente: El autor

La primera derivada del VAN también se la puede calcular por métodos numéricos, según fórmula 04:

$$van'_{(I_j)} = \frac{VAN_{(I_j+h)} - VAN_{(I_j)}}{h} \qquad [04]$$

donde,

$VAN_{(I_j+h)}$	-	valor actual neto calculado para la tasa (I_j+h).
$VAN_{(I_j)}$	-	valor actual neto calculado para la I_j.
h	-	paso numérico.

La precisión en el cálculo por métodos numéricos de la primera derivada de una expresión polinómica exponencial, como la del VAN en nuestro caso, está en función del paso h.

Gráfico 06. Cálculo de la primera derivada del VAN por métodos numéricos

h	I (*j*)	VAN	van '	I (*j+1*)	Δ
0.00000001	15.0%	-3171.2512943986	-51286.102	8.8165483794937%	
	8.816548379494%	601.2128401690	-72212.378	9.6491104103099%	8.33E-03
	9.649110410310%	14.1555323491	-68845.041	9.66967185101345%	2.06E-04
	9.66967185101345%	0.0082954960	-68764.366	9.66968391466853%	1.21E-07
	9.66968391466853%	0.000000002579782	-68764.319	9.66968391467228%	3.75E-14
	9.66968391467228%	-0.000000000003638	-68764.319	9.66968391467228%	0.00E+00
TIR	9.66968391467228%	-0.000000000003638	-68764.319	9.66968391467227%	0.00E+00

Fuente: El autor

4.4 Método de aplicación de funciones de Excel

Aplicar las funciones financieras que trae Microsoft Excel, significa hoy en día la mejor opción, para este tipo de cálculos. Por supuesto, siempre y cuando se entienda qué significa y cómo se lo calcula.

Conclusión

- La determinación de la tasa interna de retorno - TIR - por el método de interpolación es impreciso comparado con el de Newton – Raphson.

- Para emplear el método de Newton – Raphson, en muy puntuales casos, se deberá tener cuidado de escoger un valor inicial de la tasa, cuyo (***van'***) ayude a calcular la convergencia del punto resultado esperado.

- El cálculo del valor de la primera derivada del VAN por métodos numéricos, para valores de h pequeños es ligeramente impreciso comparado con el valor de la derivada calculada por análisis diferencial.

- Para el cálculo y operación con flujos de fondo e indicadores de evaluación en proyectos de inversión, lo más cómodo y versátil, hoy en día, es el uso de la ofimática.